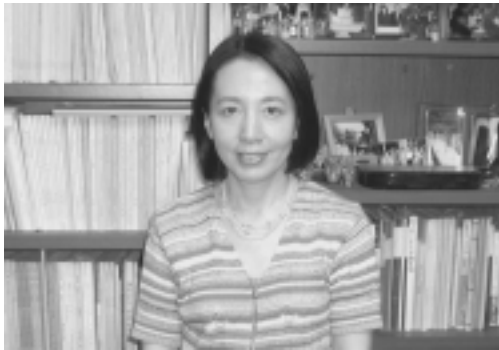




特異点に魅せられて

石井志保子 研究室～数学専攻



石井 志保子 教授

数学に代数幾何学という分野がある。日本で非常に盛んな研究分野で、日本のお家芸といわれることも多い。現に、数学のノーベル賞とよばれるフィールズ賞の受賞者が日本には3人いるが、いずれも代数幾何学における受賞なのだ。

今回取材に伺った石井先生の研究室も、まさにこの代数幾何学の研究を行っている。そしてその中でも先生の研究対象は特異点を中心である。図形の中にしばしば現れる異端児、特異点。無限に存在する点の中で異彩を放つその1点に、石井先生は何を見るのだろうか。



代数幾何学と特異点

石井先生の専門分野である代数幾何学というのは、どのような学問なのだろうか。まずはそこから見てみよう。代数幾何学においては、例えば単位円を $x^2 + y^2 - 1 = 0$ の形にし、その解空間として図形を捉える。これを n 次元について一般的に表すと方程式が複数個現れ、次のようになる。

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

つまり簡単に言えば、代数幾何学とは式で定義された図形を扱う幾何学なのである。

この代数幾何学の中に石井先生の専門とする特異点理論がある。特異点というのは、直感的には尖ったりねじれたりしている点のことで、そこでは図1のように接平面が定まらない。このような点では、方程式の左辺の $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を各変数で偏微分して

$$\text{grad}F(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) = 0$$

となる。 $\text{grad}F$ は法線ベクトルを表すので、それに大きさが無いのであれば、法線ベクトルに対して垂直なベクトルというもの定義できない。す

なわち接平面が定まらないということと結びつくのである。

ところが、特異点はただ単に「 $\text{grad}F$ が0になる点」だけでは終えられない。実は解析が非常に困難な点なのである。接平面が定まるならば、その点の近傍では図形を平面とみなすことができ、解析が比較的楽になる。しかし特異点ではそうはいかない。また特異点がたった1点存在するがゆえに、その図形がどのようなものなのか、さっぱり見当もつかないということも頻繁に起こるのである。つまりこの点を解消しないことには何も始

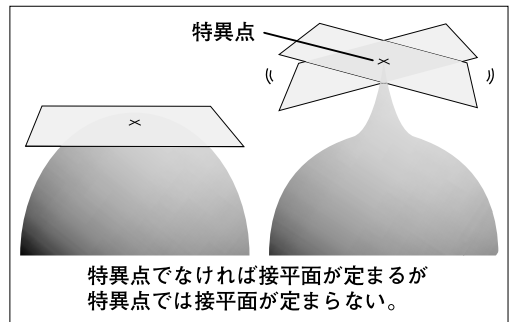


図1 特異点の特徴づけ

まらないのだ。

一方で、特異点というのは図形に関して非常にたくさんの情報を含んでいる。言い換えるならば、図形全体の性質が凝縮された点なのである。この理由からしても、特異点を研究することは非常に意味のあることなのだ。

ではこれから、特異点がどのように解消されるのか、曲線 $x^3+x^2-y^2=0$ を題材にして具体的に

見ていこう。この方程式で表される図形は複素空間上で考える必要があるが、以降で扱う複素空間や射影空間(*注1)は私達にイメージできるものではない。そこで石井先生にお願いして、解消のプロセスを追っていくのにどのようなイメージをもてばよいのか、そのイメージを具体的に描いていただいた。イメージと式とが連動している様子に注意を払いながら見ていただきたい。



イメージで追う特異点解消

解消のプロセスを見ていく前に、改めて解消とは何かをはっきりさせる。特異点が解消できるときは、「特異点をなくすような写像の中でも、特異点以外の点に関しては全単射となる写像」が存在するときをいうのである。

まずは、 $x^3+x^2-y^2=0$ において、どこが特異点かを調べる。 $\text{grad}F(x,y) = (3x^2+2x, -2y)$ であるから、 $(x,y) = (0,0)$ のところで特異点である。この方程式の実数解を表しているのが **図2の左** であり、これを \mathbb{C}^2 上のグラフとみなすことにする。

ここからは **図3** を使って、特異点解消の土台作りをイメージのみで進めていく。特異点解消の土台とは、特異点が解消できるような写像をあらかじめ作っておくことを指す。この土台作りは簡単に言えば、1点で重なり合った直線を引き離し、それらの直線が重ならないような別の平面を作る作業である。

\mathbb{C}^2 上で点Qを通る直線の傾きは全て異なるので、傾きに応じて高さを定める(**図3A**)。これにより、点Q以外の点に関して全単射ができる。この写像を点Qを通る全ての直線に施し、**図3C** のように、 \mathbb{C}^2 を滑らかにねじれた曲面にするのである(**図3A B C**)。最後はねじれた曲面をほどいた **図3D** にする。

イメージに対し、この土台作りの流れを式で追う。図形を取り巻く空間について

$$\mathbb{C}^2 \quad \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 (\text{条件 } ay = xb)$$

$$\mathbb{C}^3 (\text{条件 } ay = xb) \quad \mathbb{C}^2$$

という3段階のステップを踏むので、最初の段階をstep 1、2番目の段階をstep 2、そして最後の段階をstep 3と名付けて進めていく。

最初はstep 1の $\mathbb{C}^2 \quad \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1((x,y) \quad (x,y,a:b))$ を考える。ここでポイントとなるのは傾きに応じて高さを定めるところであり、それは $a:b = x:y$ とすればうまくいく。傾きが異なるということは x と y の比が異なるということであるから、こう定めれば、 $(x,y) = (0,0)$ では全単射となるのである。ここで新たに、 $a:b = x:y$ を変形した関係式、 $ay = xb$ が加わることに注意しておく。

次にstep 2の $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \quad \mathbb{C}^3((x,y,a:b) \quad (x,y,z))$ に移る。 \mathbb{P}^1 の元に $(0:0)$ が含まれないことを考慮すると、 a と b のいずれか一方は0でないと考えてよい。そこで a が0でないとすれば、 $z = b/a$ とできる。 $a:b = c:d$ ならば $b/a = d/c$ なので、これもやはり全単射にできる。これによって関係式は $y = xz$ と書ける。

最後はstep 3の $\mathbb{C}^3 \quad \mathbb{C}^2((x,y,z) \quad (x,z))$ である。これは単純に $y = xz$ を用いて y を消去すればよい。以上が土台作りの流れである。

さて、ここからはこの土台の上に $x^3+x^2-y^2=0$ をのせることで、特異点が解消されることを示

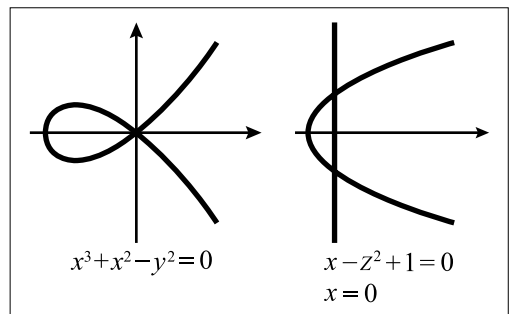


図2 解消前(左)と解消後(右)

*注1 比が元となっている空間。例えば射影空間の1次元の場合は \mathbb{P}^1 と表し、その元を $(a:b)$ とする。すなわち、比の等しいものを同一視した空間である。この空間に $(0:0)$ が含まれないことにも注意が必要である。

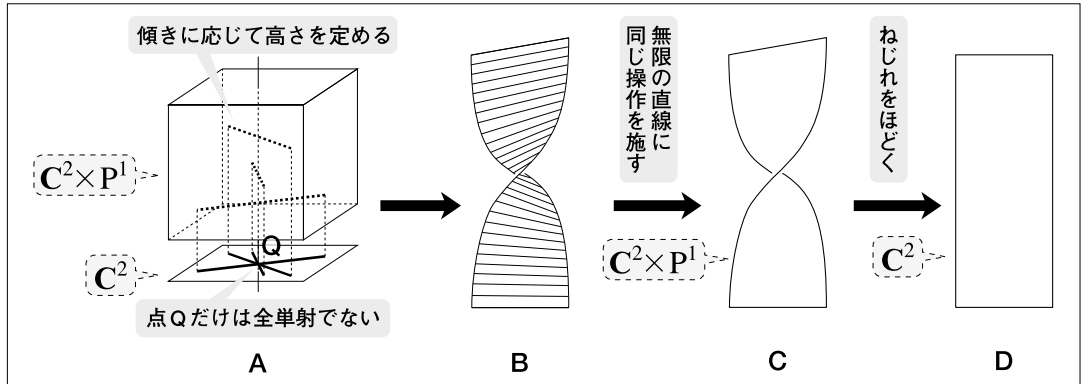


図3 土台作りの流れ

す。図3と図4を見比べていただきたい。点Qの位置に特異点を持ってきて、図形を上引き伸ばす(図4 a)。その図形をねじれた曲面上の曲線と見る(図4 b)。ねじれをほどこく(図4 c)。以上のプロセスでイメージの上では特異点が解消できることがわかる。

続いて、式の上で特異点解消を見てみよう。土台作りの結果から、最終的には $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ に $y = xz$ を代入すればよいとわかるので、 x^2 を前に出して、 $x^2(x + 1 - z^2) = 0$ を得る。これは $x = 0$ と $x - z^2 + 1 = 0$ を表すので、確かに図2の右のようになり、イメージと一致している。

ここで確認する。いま $x = 0$ と $x - z^2 + 1 = 0$ が出てきたから、gradを求める。すると前者が $(1, 0)$ 、後者は $(1, -2z)$ となるから、 $(0, 0)$ にはならない。つまり特異点は解消できているのだ。

もちろん石井先生のような代数幾何学の専門家が扱う対象はこれほど単純なものではない。当然この例よりも遥かにイメージしにくい対象を扱っている。そういう場合には、今回の解消とはまた別の、数式から得られる数学的なイメージを手がかりに模索していくのだそうだ。いずれにせよ、幾何学を研究するには豊かな想像力が不可欠だと言えるだろう。

ところで、ここまで見てきた特異点解消問題は随分と前から扱われてきた問題である。実際に多くの成果が得られており、実数や複素数の範囲ではどのような特異点でも一般には解消できること

が広中平祐(*注2)によって証明されている。

それに対して、石井先生が現在行っている研究は最先端に位置している。現在進行形のこの分野は、未解決の問題を数多く有している難題で、Nash問題と呼ばれているものである。この問題はJohn Nash(*注3)によって1968年に提唱された。ところが、30年以上にも及ぶ研究の末に得られた結果は「2次元の非常に特殊な特異点に関しては肯定的に解決できる」というものだけで、ほとんど進展しなかったのである。この事実からもわかる通り、Nash問題は大変な難題なのだ。

しかしこの難題も、ここ最近で徐々に動き出しつつある。そして、石井先生もこの進展に大きく寄与しているのだ。ある種の図形上では何次元でもNashの予想が成立していることを石井先生が証明したために、今後のNash問題に対する研究の方向性が定まったのである。

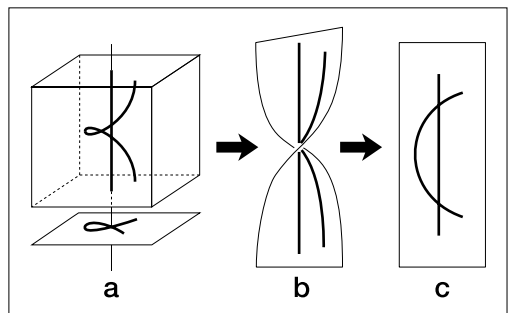


図4 特異点の解消

*注2 日本人として2人目のフィールズ賞受賞者。京都大学名誉教授であり、2002年まで山口大学学長を歴任。

*注3 数学者として唯一のノーベル経済学賞受賞者であり、ゲーム理論の進展に大きく貢献した。微分幾何学や代幾何学など、数学の様々な分野で活躍する。彼の半生を描いた映画『A Beautiful Mind』が2002年のアカデミー賞に輝いた。



Nash問題 ~ 現代数学の最前線 ~

Nash問題を見ていくにあたって、まずは2つの事柄を説明する。1つはarcのfamilyと呼ばれるものであり、もう1つはessential divisor(以下ED)というものである。そこで、まずはfamilyを紹介する。

Nash問題ではある1点に着目し、その近傍のみを対象とする。図5ではこの点Rを通るような曲線を無数に考えるのである。この曲線はどのような曲線でもよい。尖っていても、丸まっても、それを除くように十分に小さな近傍をとればよいのだ。ここで、近傍内の曲線をarcとよぶ。

このarcを束ねたときに、その束をfamilyというのである。もう少し正確に言うと、例えばxy平面上の場合は、

$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + \dots = 0$$

という多項式を考えて、この多項式でarcを記述しようと試みる。各係数を複素数の範囲で自由に動かしたときに表すことのできるarc全体を、1つのfamilyというのである。

点Rが特異点でなければ近傍を平面とみなせるので、arc全てを平面上の曲線と考えることができ、1つのfamilyで表すことができる。しかし特異点では少なくとも有限個のfamilyで表せることまでしかわかっていない。

次にEDを考える。先ほどの特異点解消において、解消の前に特異点であったところは $x=0$ になった。これを一般に例外因子とよぶ。そして、通常複数個現れる例外因子は、さらにEDとそれ以外に分類できるのだ。

大抵の場合は、特異点解消の方法は1通りではなく、何通りもの解消方法がある。そしてそれに伴って例外因子も様々なものが現れる。しかしどの解消方法に対しても必ず現れる例外因子があり、それをEDとよぶのである。

この2つの概念の関係を考える。各arc上の点を点Rに近づけていけば、その点に対応する像は必ずEDにのりような曲線を描く(図6) そのとき、arcが同一のfamilyに属するのであれば、ほとんどの像が同じEDに向かうことがわかっている。

この事実を踏まえ、familyとEDの間に全単射の関係があるのではないかという予想がNash問題

なのである。

石井先生は過去にも様々な国の研究者と共同研究を行ってきた。今回この問題に取り組む際にも、プリンストン大学のKollar教授との共同研究を行ったのである。各自で研究を進め、メールを取り交わして意見を交換し合う……。そして遂に、トーリック多様体という図形上の特異点であれば、何次元でもNashの予想が成立していることを証明したのである。また一方で、トーリック多様体以外の図形においていくつかの反例を示したのだ。

トーリック多様体はやや特殊な図形ではあるが、この結論によってにわか研究の方向性が見えてきた。現在Nash問題に取り組んでいる研究者が目標としていることは、トーリック多様体で言えたことがどこまで拡張できるのかということである。この難問解決に向けた方向性の発見が、提唱者のNash自身を大変喜ばせたのも頷ける。それほど大きな成果だったのである。

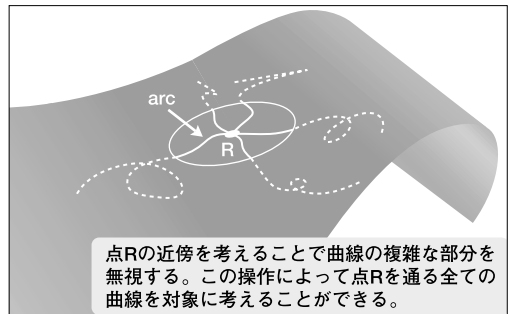


図5 arcとは

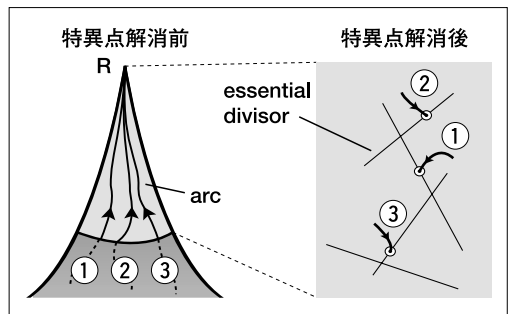


図6 arcとessential divisor



数学の魅力とは？

ここまで見てきただけでも代数幾何学がとても奥深い分野だとわかる。この分野では私達が想像もできないような、非常に広範囲に及ぶ対象を扱うため、研究者の興味を惹く話題は尽きないのである。何を対象とする幾何学なのかについて、一応ここでは単純に、多項式で記述できる幾何学であるとしてきた。しかし本当はそんなに単純ではない。不思議な話ではあるが、何を対象とする分野なのかもこれまでに多くの議論がなされてきたくらいなのである。現在ではフランスの数学者 Grothendieck が発表したスキームという考えが、代数幾何学の研究対象を語る上で欠かせないものとなっている。

扱う対象が多いということは、何か新しいことが発見されれば、それに伴って新たな問題がたくさん出てくるということでもある。Nash 問題などはその最たるもので、特異点解消問題のように昔から馴染みのある問題に加えて、こういった斬新な予想が次々と浮上してくるのだ。どこまでいっても解決すべき問題が止め処なく沸き上がってくるのである。

どこまでいっても終わりの見えない活動に、一流の研究者にもスランプはつきまとう。何しろ頭脳だけが頼りの数学であるから、何も生み出せずに焦る時もあるという。“Publish or Perish”——これは石井先生に教えていただいた言葉である。数学に限らず、研究者は常に「論文を発表しなければ滅びる」という危機感を持っている。研究に行き詰まった時は、石井先生も思いきってそこから離れ、しばらくの間は他の研究者の論文を積極

的に読んだり、大学の講義に専念したりするそうである。

数学者としての目標は「いつまでも良い仕事をし続けること」だと語る石井先生。数学から離れたくなる時があるにもかかわらず、なぜまた数学に戻っていくのだろうか。これは数学につまずいたことのある人なら誰も抱く疑問であろう。ではここで改めて問いたい。数学の魅力とは？

「数学をなさっていてどのような時に楽しいと感じますか」という質問に対して石井先生は語る。「美しい規則性が見つかり、深い真実があるということを発見していく。そのプロセス自体が楽しい」。

楽しいプロセスを際限なく与えてくれるからこそ数学は魅力的なのではないだろうか。そしてプロセスが楽しいからこそ、日夜考えていられるのではないだろうか。休みなく研究に打ち込む石井先生であるが、今回の取材を通してその行動力の源が垣間見えたような気がした。



非常に御多忙な石井先生ですが、なんと近々一般向けの本を出すとのこと。日本評論社から出るその本は A. Beutelspacher の翻訳書で、『数学が苦手だったあなたへ(仮題)』という本です。取材の折に内容を少し教えていただきましたが、非常に面白そうで、期待は膨らむばかりです。

最後になりましたが、4度及び取材にも快く応じていただき、また懇切丁寧な解説をしてくださった石井先生には本当に感謝致しております。併せて、先生の今後益々の御活躍をお祈り致します。どうもありがとうございました。

(小川 友彬)

参考文献 石井 志保子 『代数幾何と特異点(数理科学 6月号)』 サイエンス社(1998年)
上野 健爾 『代数幾何入門』 岩波書店(1995年)