In Laboratory Now

研究室訪問２

「実験」から見るトポロジー

小島 定吉 研究室～数理・計算科学専攻

小島 定吉　教授

小さい頃、積み木やブロックで遊び、三角形や円といった図形に興味を惹かれた記憶のある人は多いのではないだろうか。私達に限らず、紀元前ユークリッドの時代の学者達も同じように、魅力的な図形に大いに興味を惹かれ、研究をしてきた。そして、今なお人間の図形に対する興味は尽きない。その結果、幾何学はますます多彩で複雑なものへと変化してきているのだ。

ここ小島研究室は情報科学科に在籍していることもあり、積極的にコンピュータを取り入れ、位相幾何学（トポロジー）の研究を進めている。

「位相幾何学」とは？

紀元前３世紀頃から、ユークリッドを初めとする学者達は幾何学に非常に興味を持ち、研究を重ねてきた。その結果幾何学は、誰もがこれ以上の発展は望めないだろうと考えるほどの完成度まで到達した。ところが、18世紀初頭に幾何学は新たな局面を迎えることとなる。オイラーが提唱した「ケーニッヒスベルグの問題」はその発端ともいえる非常に有名な問題だ。この問題では四つの陸に橋が七つ架けてあり、これを同じ道を通らずに全部渡り切ることができるか、ということを考える（**図１左**）。オイラーはこの問題を、陸を点と見なし、橋を辺と置き換えることで、**図１右**の図形が一筆書きできるかどうかを考えることに帰着させた。このように、オイラーの考えた幾何学は従来とは随分違ったタイプのものだということが分かるだろうか。この問題は図形の面積や角度などの量を考えているわけではない。そのため、今までとは手法の違う、新しい幾何学を考える必要があったのだ。このように図形を単純化してその本質を抜き出す手法は、やがて図形どうしの関係を

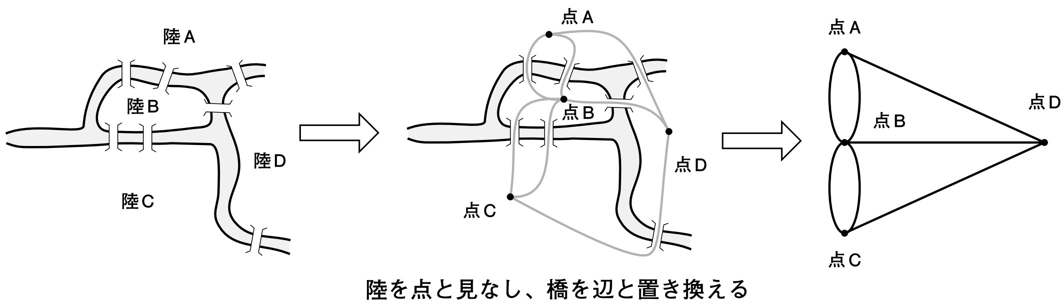


図１　ケーニッヒスベルグの問題

取り扱うことに発展し、これが現在の位相幾何学という分野のもとになった。

位相幾何学では、普段私達が行うよりももっとおおまかに図形を区別する。例えば、多面体と球を同じ分類としてしまうのだ。このことは、多面体の面が全てゴムでできていると考えると理解しやすい。この多面体の中に空気を入れると形が変わっていき、最終的には球になるのが分かるだろう。このような関係にある図形を同じ分類とすることから、位相幾何学は「ゴム膜の幾何学」とも呼ばれている。

ところで、位相幾何学で同じ分類に属する図形は「位相同型」の関係にあるという。この言葉を用いれば、多面体と球は位相同型であるということになる。位相幾何学の研究の中心は、これら位相同型な図形の間に共通する性質について調べることにあるのだ。

特に、位相同型な図形の間に何か一定量が存在するとき、これを「位相不変量」という。位相不変量で最も有名なのが、多面体に関するオイラーの法則だ。この法則は、多面体の頂点の数をV、辺の数をE、面の数をFとすると、$V-E+F=2$という式が常に成り立つというものである。例えば、四面体では$V=4$、$E=6$、$F=4$なので確かにこの法則を満たしている。

位相幾何学という分野が確立してから、飛躍的に性質が解明されてきた図形に、多様体というものがある。19世紀末頃から、ポアンカレを初めとする数学者達はこの多様体を中心に研究してきた。多様体とは、簡単にいうと曲線や曲面などを一般の次元に拡張したもののことである。また、多様体の大きな特徴として、あらゆる所の近傍に局所座標系が作れることが挙げられ、m次元の局所座標系が作れる多様体はm次元多様体と呼ばれる（**図2**）。このことから分かるように、直線や円周は１次元多様体、平面や球面は２次元多様体である。

現在では微分幾何学や代数幾何学など、位相幾何学以外の数学の分野でも多様体は盛んに研究されている。さらに、近年になって数学以外の分野に多様体の研究成果を適用する場面も格段に増えてきた。例えば、フラーレンを多様体と見なすことで、なぜサッカーボール状の形で安定するかが解析しやすくなるなど、その応用範囲には計り知れないものがある。

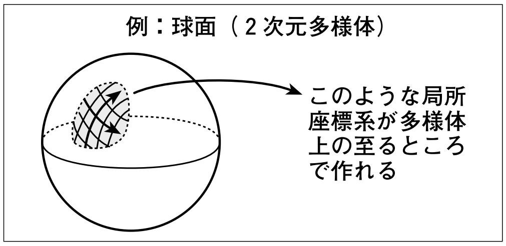


図２　多様体の特徴

多様体の研究とシミュレーション

小島研究室では主に２・３次元で双曲構造を持つ多様体について研究をしている（**図３**）。双曲構造とは、$n-1$次元の双曲面

$$-x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=-1$$

などに代表される多様体の構造のことだ。

この双曲構造が研究され始めた背景として、大きなインパクトとなった、ある幾何学上の大発見がある。ユークリッド幾何学五つの公理（**＊注１**）の第五公理、平行線公理の独立性である。平行線公理とは「ある点を通り、ある線に平行な線は一本しか引けない」というもので、これがその他の

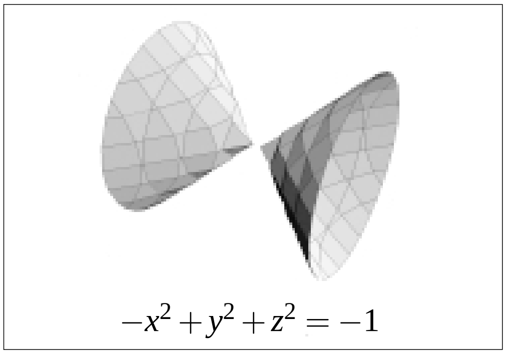


図３　２次元双曲面

＊注１　五つの公理：ユークリッド幾何学五つの公理とは、１．任意の二点間に直線を引くことができる　２．任意の有限な直線は無限に延長することができる　３．任意の点を中心として，任意の半径で円を描くことができる　４．すべての直角は等しい　５．直線外の一点を通ってこの直線に平行な直線はただ一つに限る　の五つを指す。

基本公理と本当に独立かどうかが長い間数学界の疑問となっていた。しかし、1830年代にボヤイ親子やロバチェフスキーによってこれが他の公理とは独立であることが証明された。その結果、この公理が成り立っていないような幾何学を考えることができたのだ。双曲構造はその対象の一つであり、位相幾何学の中では双曲構造を持つ多様体が盛んに研究されている。

では、なぜ双曲構造が研究されているのか。一つの理由として挙げられるのは、２・３次元の多様体では、双曲構造の性質を解明すれば多様体の他の構造も全て分かることが理論から明確になっているということである。そのため、小島研究室に限らず位相幾何学の研究では双曲構造を研究するのが主流なのだ。

また、宇宙空間の構造と関係していることも大きな要因である。ユークリッド幾何学では円の半径をrとすると、円周の長さは$2\pi r$だが、双曲幾何学では円周の長さは$2\pi\sinh r$となる。$\sinh r$は、

$$\sinh r=\frac{1}{2}(e^r-e^{-r})$$

で定義されるので、rが大きくなってくるとほぼπe^rに近づき、これは指数関数的に円周の長さが長くなることを意味する。つまり双曲幾何学で考えると、中心から離れるにつれて円の面積は飛躍的に広くなる。この性質は、宇宙空間内の物質の密度を一定と考えると、遠くに行けば行くほど物質の個数が多くなるという宇宙物理学の観測結果を端的に表しているのだ。さらに、宇宙時空における距離は、特殊相対性理論の考察から

$$s^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2 \qquad (c：\text{光速})$$

で表せることが分かっているが、この式は双曲構造を表す式と同じ形である。このように双曲構造は宇宙空間の構造と非常によく対応しており、双曲構造が研究対象として主流なことも頷けよう。

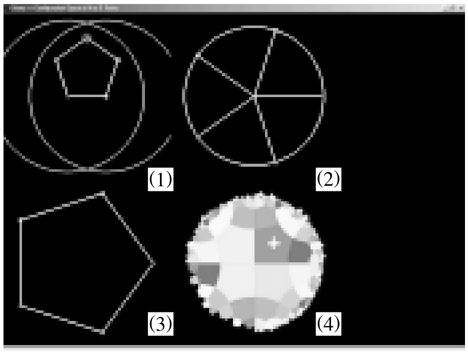


図４ー１　多角形のモジュライのプログラム

それでは、実際に教授が行った双曲構造が関連する研究の一つ、多角形のモジュライに関する研究を紹介していこう。**図４ー１**の**(1)**は、正五角形の辺の長さを１に固定し、角度だけが変えられる状態のもとで一つの頂点を動かしていく、というモデルである。この際、正五角形の底辺だけは動かないようにする。ここで、実際に点を動かしてみると、五角形が鈍角を持ったり、または三角形になったりと、色々な図形に変形する。モジュライとはこのような図形をある性質に基づいてまとめたものの集合のことなのだ。

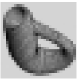
小島研究室では、このモジュライを可視化するためのプログラムを組んだ。再び**図４ー１**を見て頂きたい。モジュライに至る三つの数学的な変換を施した結果をそれぞれ表しているのが**(2)**、**(3)**、**(4)**の図形である。**(4)**の図形が、双曲構造上で可視化されたモジュライを表している。ここで、**(1)**の図形とモジュライ上の点は対応している。つま

図４－２　鈍角を持つ場合

図４－３　辺の長さを１に固定しない場合

り、**図４－２**のように、**(1)**の図形を変形すれば点がそれに合わせて移動していくのだ。

このように変換の過程をコンピュータで処理することで、五角形とモジュライの要素の対応関係が視覚的に捉えられ、理解が容易になる。さらに、五角形の辺の長さを１に固定しない時にはモジュライ自体が変形し、その時の五角形とモジュライの形の対応関係が一対一対応であることが確認できる**図４－３**など、新たな発見にもつながっている。



実験数学というアプローチ

小島研究室では、実は前述の五角形とモジュライの一対一対応を定理として証明することにも成功している。この際大きな役割を果たしたのが、コンピュータを活用した実験である。このような「実験数学」と呼ぶべき新しい試みが、非常に効果的な役割を果たしたのだ。

実験数学では、理論だけでは見当がつきにくい命題に直面したとき、その命題の具体的な場合についてコンピュータを用いて計算する。そして、そこから得られた結果をグラフなどの形で表現することにより理論式をある程度予想し、それを手がかりにしながら理論を構築していく。

ここで重要なことは、集合をデータベース化することである。集合の要素の個数はほとんどの場合無数に存在するため、全てを計算対象にしていては、いくらコンピュータといえども計算し尽すことはできない。そのため、五角形の集合をモジュライとしてまとめたように、ある性質のもとで集合の要素を分類する必要があるのだ。

また、最近の数学系の論文では、データをWebなどの誰もがアクセスできる場所に公開することもある。データベース化することは、他の研究者が論文を検証する意味でも非常に重要である。

実験数学のアプローチを通じて、小島研究室で現在進められている研究に「サークルパッキング」がある。サークルパッキングとは、曲面上に様々な半径の円を必ず三角形を作るように敷き詰めていくことである。小島研究室では、２次元トーラス(**＊注２**)のような穴の空いた多様体に対し、その穴の数(これを「種数」と呼ぶ)と、敷き詰め方を記述するパラメータの個数の関係を検証している。例えば２次元トーラスの場合、ある断面で切断し、さらに円環に沿った方向からも切断すると長方形に展開できる。つまり、２次元トーラスを構成するのは平面であり、敷き詰めていく際の自由度は平面の次元が２であることが分かる。小島研究室では、種数がgの時、円を詰めていける自由度は特別な条件を持つ場所で$6g-6$であることを証明した。また、種数が１の場合は全ての場所で自由度が２であることの証明にも成功している。現在はこの話をさらに拡張し、任意の種数に対してどのような条件下でも$6g-6$が正しいのかどうかを、コンピュータを用いて検証を続けている。

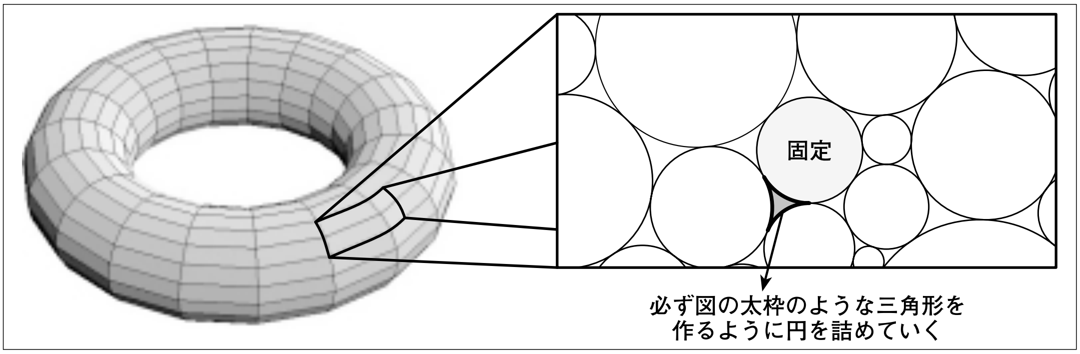


図５　２次元トーラスと拡大図

＊注２　２次元トーラス：穴のあいた、ドーナツ状の図形。より正確にいうと、「一つの小さな円環を大きな円環に沿って回転させたもの」となる。

これからの位相幾何学は……

現在小島研究室では、メンバーが作成したプログラムをホームページに公開している。これらのプログラムは研究用とは別に、主にプレゼンテーション用として作られたもので、先程の五角形のプログラムもその一つである。パソコンの画面上で見てみると一見簡単に思えるが、実際には非常に複雑な数学の理論がプログラムに含まれているのだ。しかし、このように視覚的に捉えやすいものを作成することで、一般の人でも直感的な理解がしやすくなる。今後実験数学によるアプローチが今まで以上に浸透していけば、コンピュータは何も研究手段としてだけでなく自分の研究を広めていくという意味でも、大きな役割を果たしていくだろう。

ところで、取材を進めていく中で一つ重大なニュースがあった。かのミレニアム問題（**＊注３**）の一つとして有名な「ポアンカレ予想」が解けた、というのである。ポアンカレ予想とは、「単連結な３次元閉多様体は３次元球面と位相同型である」という問題であり、1896年に提起されて以来、数多くの数学者がこの問題に挑戦してきた。実際、過去に何度かポアンカレ予想が解けた、と発表されたこともあったのだ。しかし、それらの証明はいずれも不十分で、誰一人として完全な証明に到達することができなかった。そうこうしているうちに100年以上も未解決となってしまい、位相幾何学の、ひいては数学界全体の長年のテーマとなってしまった。そのポアンカレ予想が解けた、というのだ。まさに、数学界を震撼させるような出来事だと言えるだろう。ポアンカレ予想を解いたと言われているのはロシアの数学者ペレルマンで、証明には「Ricci flow」と呼ばれる微分幾何学の手法が用いられている。この証明が正しいかどうかの検証はまだ全部は終わってはいないものの、数学者達の間でもほぼ確実だという声が高い。このように、数学界も分野の垣根を越えて研究が行われる時代へと突入しつつある。ポアンカレ予想の証明が認定されれば、位相幾何学の研究はますます面白いものになっていくのではないだろうか。

小島研究室は、学部では情報科学科に在籍しているが、大学院の情報理工学研究科になると数学科出身の学生も多く集まってくる。そのため、数学に強い学生と計算機科学に強い学生による相乗効果が期待できる環境であるというのが魅力だ。また、小島教授自身も研究を進める上で様々な刺激を得られるので、実に理想的な環境なのだ。もともと数学科出身である小島教授の目標は、もっと積極的に実験数学を活用し、その上で様々な理論を導いていくことである。近年では、小島研究室で行われている実験数学的なアプローチが急速に広まってきている。小島教授は、「数学界全体も今後そのようにシフトしていくのではないか」とも語っている。実験数学が、やがては数学の研究自体に変革をもたらす可能性までも秘めているのだ。

最後になりましたが、お忙しいところ取材に快く応じていただいた小島研究室の皆様に御礼を申し上げるとともに、これからの更なる発展をお祈りいたします。（三田村 陽平）

参考文献

W.P.サーストン 著, S.レヴィ 編, 小島定吉 監訳 「３次元幾何学とトポロジー」 培風館（1999年）

松本幸夫 著 「多様体の基礎」 東京大学出版会（1988年）

小島研究室URL

http://www.is.titech.ac.jp/~sadayosi/lab/index-j.html

＊注３　ミレニアム問題：数学研究の権威であるクレイ研究所が、100年以上にわたって未解決の問題七つを100万ドルの懸賞問題として発表したもの。中には、素数論で登場するリーマン予想や計算機科学で現れるＰ＝ＮＰ問題などがある。