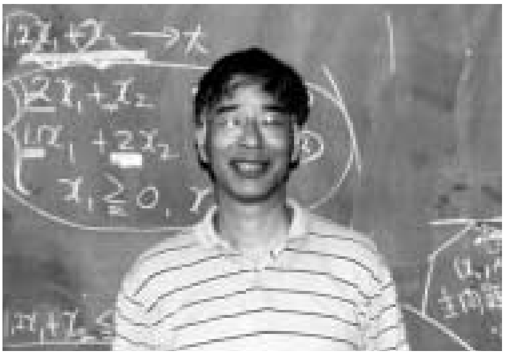
In Laboratory Now

研究室訪問２

より速く、より効率的に

小島研究室～数理・計算科学専攻



小島　政和　教授

モノ、カネ、ヒト、情報……。現代社会は多くのものが錯綜している時代といえる。我々をとりまくこれらのものをうまくまとめ、効率よく物事を進めていきたい。技術の進歩が著しい現代において、こうした要請はこれまでよりも強いものとなってきている。

最適化とは、「まとめる」ことを実現するための手段だ。それでは、最適化とは実際にどのようなもので、社会に対しどのような意味を持っているのだろうか。今回、最適化について長年研究している小島研究室を訪ね、お話を伺った。

最適化ってなんだろう？

人は何らかの目的を持って行動している。そのとき、目的をよりうまく達成するために、何をすればよいのか、そして、何ができるのかを考えている。まわりには様々な情報が存在していて、それを収集し、整理することにより目的達成のための手段を決定する。簡単なことに思えるかもしれないが、実際には高度な情報処理が必要となる。最適化とは、与えられている情報をもとに目的を達成するための最もふさわしい手段を選び出すという、一連の情報処理のことを指している。

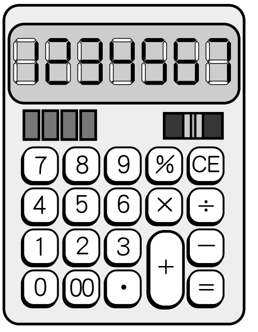
最適化の分野は、現代社会の必要に応える形で生まれた。このことは、現代社会とは切っても切れない関係にある企業について考えればわかりやすいだろう。企業は利潤を得ることを目的としていて、最大の利潤を得るために仕事内容をうまく配分して経費をできるだけ抑えようとする。そこで、はっきりと結果を出せるような改善のための手段として、最適化が必要とされるのだ。このことから考えてみても、最適化が現代社会において欠かすことのできない学問であると言っても過言ではない。

では、最適化について具体的に見ていこう。現代社会において、様々な最適化すべき問題がある。前に挙げた企業もその一例だ。では、このような現実の問題をどうすれば最適化することができるのだろうか。結論を言ってしまうと、このままでは最適化を行うことができない。最適化を行うためには、数学の問題のような数式の形になっていなければならないからだ。そこで、現実の問題を数式にモデル化するという作業が必要となってくる。

ところが、この作業はすんなりとできるわけではない。それは、モデル化できないほど複雑な問題が数多く存在するためだ。このような場合に

は、問題をある程度簡略にしてモデル化することにより、それに近い解決方法を得ている。簡略にするといっても、これによって行われる最適化によって、はかり知れないほど効率をよくすることが可能となる。以上のようにしてモデル化された問題を解くことにより、最適化された答えを得ている。

次に、最適化という分野ではどのようなことが必要とされるのか見ていこう。この分野の主な目標はモデル化された問題を解くことだ。数式を解くというのだから、もちろん計算が必要となる。ところが、現実上の問題をモデル化したような規模においては、とても人間に解けないほど計算量が莫大になってしまう。そこで、現代社会においても欠かすことのできないコンピュータが必要となる。また、それと同時に不可欠なのが数学だ。コンピュータがなければ計算量が多すぎるので人間には解けないし、数学がなければ解法を作ることができない。すなわち、最適化という分野は、コンピュータと数学を融合した分野と言える。



そのため、解ける問題の規模は、コンピュータの性能、そして実際に計算を指示している解法の効率に依存している。最適化の分野において研究されているのは、同じコンピュータでいかに速く問題を解くか、すなわち、いかに効率のよい解法を作り出すかということである。現代におけるコンピュータ技術の進歩が目覚しいといっても、問題を実際に解く解法が悪くては解ける問題の規模が抑えられてしまうからだ。

∑ 最適化問題を解いてみよう

コンピュータが計算をする手順のことを、一般に「アルゴリズム」と呼んでいる。最適化を行うときは、あらかじめコンピュータにアルゴリズムを入力しておき、それに問題のデータを入れて解かせている。アルゴリズムはあくまで「手順」であるため、決まった形の問題の計算しか行えない。すなわち、モデル化された問題がアルゴリズムに合う形になっていない限り、解くことができない。問題とアルゴリズムを合わせるためには、アルゴリズムを問題に合わせて変えるか、アルゴリズムに合わせるように問題をモデル化する必要がある。

ところが、系統自体が違う最適化の問題が存在するため、全ての問題を同じアルゴリズムで解くことはできない。そのため、いろいろな種類のアルゴリズムが必要となってくる。そこで、問題をいくつかに分類して、それぞれについて研究がなされている。いくつか挙げてみると、線形計画問題、非線形計画問題、ネットワーク最適化問題、組み合わせ最適化問題などがある。ここでは小島先生が主に研究なさっている、線形計画問題について取り上げることにする。

線形計画問題の簡単な例を挙げると、次のようなものがある。

目的関数: $x_1 + x_2 \to$ **最大 (最小の場合もある)**

$$\textbf{制約条件} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解き方を見ていく前に、線形計画問題が概念的にどのような特徴を持っているのかをおさえておこう。それは、制約条件が示している領域が多面体を成していること。そして、その解は有限個ある多面体の頂点上に必ずあるということだ。つまり、単純に考えると、各頂点についてそれぞれ目的関数にあてはめていき、より適した点を比較して見つけていけば有限回の計算で解を求めることができる。しかし、このような原始的な方法で解くと、計算量が非常に多くなってしまう。そのため、もっと効率のいい解法を作らなければ規模の

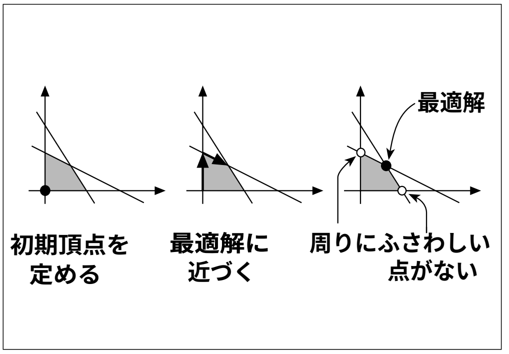


図１　単体法

大きい問題を解くことはできない。

線形計画問題の解法で最初に考え出されたのが、単体法である。単体法は前に述べた、制約条件の示す領域が高次元空間の多面体になるという特徴をうまく利用している。

単体法の解き方は次の通りだ。はじめに、初期点を多面体の適当な頂点上に設定する。そして、定めた点の隣の頂点を調べ、その頂点がより目的関数に適しているならば移動する。これを繰り返すと、最終的には定めた頂点が周りの全ての頂点より条件に合うような状態になる。そのときに定めている頂点が求める最適解というものだ。以上の手順は図１に示したとおりである。はたして本当に最適解となっているのかと思うかもしれないが、線形計画問題の性質からそうなることが証明されている。

この解法を用いると、最適解を求めるまでに、全ての頂点について計算をする必要がない。そのため、単純に計算するよりも計算量を減らすことができる。単体法は提案されて以来、線形計画問題の分野において最も有効な解法としての地位を確立した。

単体法は長い間使われていたが、欠点があった。それは、計算回数が頂点の個数の影響を受けるため、問題の規模が大きくなるにつれて計算量が激増してしまうことだ。そのことが、長い間学者の頭を悩ませていた。比較的近年になり、この欠点を打ち破る画期的な解法が登場した。それが内点法という解法である。

名前から想像できるかもしれないが、この解法は多面体の縁ではなく、内部を通るという考え方をした解法だ。では、その解き方について見ていこう。最初に適当な初期点を取らなければならないのは単体法と似ているが、内点法は初期点を頂点に限らずに設定することができる。そのあとは図２のように、より条件を満たしている適当な内部の点を取っていく。このようにして、最適解に近付いていくのだ。この解法を用いる利点は、最適解に近付く経路が頂点と無関係となっていることだ。これにより、最適解の十分近くまで到達するのに必要な計算回数が頂点の数によらず、どの問題でも大体同じくらいになる。一回当たりに必要な計算量は単体法よりかなり多くなるが、計算回数が変わらないため、問題の規模が大きい程計算の効率がよくなる。この解法が登場したことにより、単体法に比べて大型の問題をずっと効率よく解けるようになった。

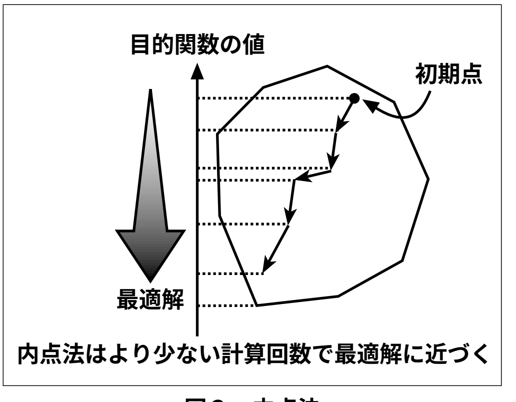


図２　内点法

Σ 新しい解法あらわる！

内点法の説明のときに「解の十分近く」という表現を使った。それは、内点法を用いて問題を解く上で、最適解まで到達することができないためだ。そのため、内点法を用いると解いていく過程において、目的関数の値が最適解にどれだけ近くなっているのか、わからないという欠点がある。そんな中、内点法の欠点を補った新しい解法が作られた。それが、小島先生らのグループが発表した、主双対内点法という解法である。

はじめに、この解法で使われる双対定理を簡単

に説明しておこう。最初に与えられた線形計画問題を主問題と呼ぶことにする。そして、この問題に含まれている目的関数と制約条件の変数を、ある法則により並び変えて新しく制約条件を作り、それを双対問題と呼ぶ。主問題が最小値を求める最小化問題であるとすると、式は次のように表すことができる。

主問題

目的関数：$ax_1 + bx_2 \rightarrow$ **最小**

$cx_1 + dx_2 \quad e$

制約条件　$fx_1 + gx_2 \quad h$

$x_1, x_2 \quad 0$

双対問題

目的関数：$ey_1 + hy_2 \rightarrow$ **最大**

$cy_1 + dy_2 \quad a$

制約条件　$fy_1 + gy_2 \quad b$

$y_1, y_2 \quad 0$

このとき、主問題の最小解と、双対問題の最大解が等しくなるという関係が成り立つ。これが双対定理である。

主双対内点法とは、内点法に双対定理のこの性質を組み合わせたものだ。線形計画問題（＝主問題）に双対定理を当てはめて双対問題を作る。そして、主問題と双対問題を同時に解いて、その目的関数値の差を比べることにより、最適解にどれだけ近くなっているかを知ることができる。このことは、図３を見ていただければわかりやすいと思う。ここで、二つの問題を同時に解くのだから主双対内点法を使うと計算量が二倍になると思う方もいるだろう。確かに、計算の効率を求める最適化の分野においては、計算量が増えることは解ける問題の規模を小さくし、その解法自体の価値を大きく下げてしまう。しかし、この主双対内点法の最大の特徴は、計算量を片方の問題だけを解く場合とあまり変わらない程度に抑えていることだ。それにより、解く問題の規模を落とさずに使えるので、非常に有効な解法となっている。

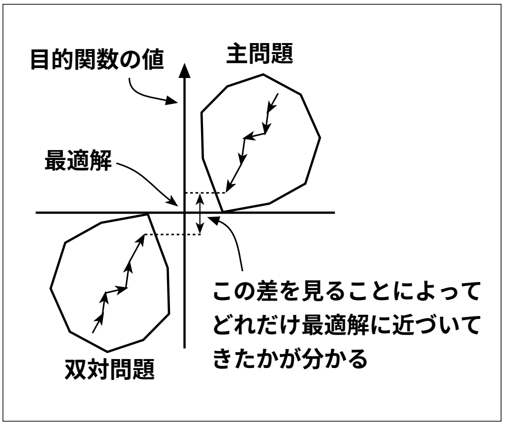


図３　主双対内点法

主双対内点法が発表されたのは1987年のことだ。それから、数年後には主双対内点法を利用して線形計画問題を解くソフトウェアが世に現れ始めた。今では、そのソフトウェアを利用して、百万近くの変数を持つ線形計画問題までもが解けるようになっている。しかし、それでも規模が大きくて解けない問題が多く存在している。これからのこの分野の課題として、より速く解けるアルゴリズムを開発し続けることが挙げられる。そのためにも、新しい技術を使っていかなければならない。例えば、ネットワークを利用して同時に複数のコンピュータを動かして問題を解けば、解くことのできる問題の規模も大きく変わってくるだろう。このような新しい技術を使うためにも、またアルゴリズムを作らなければならない。このように、最適化の分野は技術の変化とともに変わるという一面を持っている。そのことを考えても、さらなる発展の期待できる分野と言えよう。

小島研究室で行われている研究は、最適化の基礎となる部分である。その成果は、経済、建築、ネットワーク、CGの世界など、とても思いつかないような分野にまで応用されている。現代において欠かせない、縁の下の力持ちだという印象を強く受けた。

最後に、お忙しい中取材に応じていただき、資料などを提供していただいた小島先生にこの場を借りて厚くお礼を申し上げたいと思います。

（遠山　亮介）