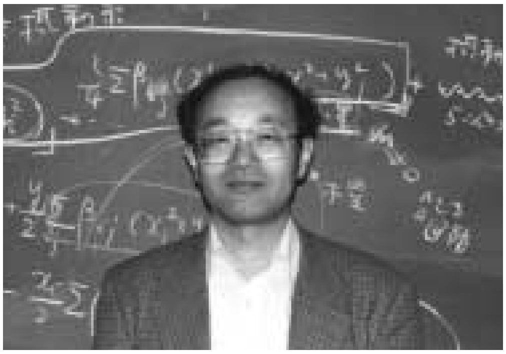
In Lavoratory Now

研究室訪問 6

# 数学で見る現代の古典力学

## 伊藤研究室～大学院理工学部数学専攻



伊藤　秀一　助教授

古典力学系、という数学の分野が存在する。数学に対し、数字のみを扱う非日常的な学問といったイメージを抱いていたとしたら、少し驚くかもしれない。数学と物理が密接な関係にあるのはわかっていても「数学としての古典力学系」という言葉は新鮮な印象を与える。

そこで我々は「古典力学系」とは何か？　という問いのもと、この分野の研究をされている伊藤秀一先生を訪ねた。

## ナゾの数学　“ 古典力学系 ”

古典力学と聞いて思い出すのは、高校で最初に学ぶ一般的な物理学だろう。運動方程式に始まって運動量やエネルギーの保存を学ぶこの学問に、苦い思いをした人も多いはずである。

その古典力学の運動は、ハミルトン系と呼ばれる方程式系によって記述される。その解の挙動の研究、つまりハミルトン力学系と呼ばれる分野が一言でいえば伊藤先生の研究対象なのだ。ここで「力学系」という言葉を用いてはいるものの、これは力学の研究に端を発しているところからつけられた表現であり、今日ではすでに力学そのものから離れ一つの数学用語になってしまっている。

では、ハミルトン力学系の研究とは、具体的にどういう研究なのだろう。

一般に、力学の運動方程式は解を知ることができない。全ての時間にわたって解の挙動を予測することは不可能なのだ。しかしコンピュータの進歩によって、ある程度有限な時間の範囲でなら方程式の解を知ることは可能になった。そこで、時間ｔ→±∞における解の挙動（平衡状態に収束するとか、無限遠方に遠ざかっていくとか）が数学の研究対象となったのである。

ｔ→±∞での解の挙動？　と思うかもしれない。実際、過去に習ったような単純な運動方程式の解において、時間無限遠方での挙動など考えもしなかったのではないだろうか。

## 解とドーナツのアマイ関係

ここでは実際に簡単な物理現象として、単振動の運動を考えてみよう(図１-(a))。この運動は次の式で記述される。

$$m\ddot{x}=-kx \quad \left(\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots (式１)$$

ここでmはおもりの質量を、x(t)は時刻ｔにおけるおもりの平衡位置からのズレを表している。摩擦は無視するものとする。この単振動の解の挙動を$(x,\dot{x})$について表すと図１-(b)の通りである。円が一つに定まっていないのは、初期値x(0)と

速度$\dot{x}(0)$が異なっているためである。このように運動の状態を決めるには位置と速度の二つの変数が必要となる。この、xと$\dot{x}$の空間、x-$\dot{x}$平面のことを相空間という。例えば、三次元で物体が運動するときは、位置と速度の両方にxyz方向の変数が三つずつあるから、計六つの変数の空間を相空間と呼ぶことになる。

ここで注目してほしいのが、図１-(b)の解曲線は閉じていることである。これは解の挙動が周期的であるということを示している。その周期をTとすると、時刻t＝ｎＴでは初めと全く同じ位置と速度を持つことになり、周期Tの周期解ということができる。

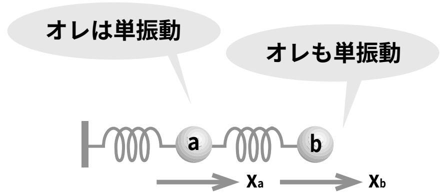



図 2-(a)　おもり二つの連成振動

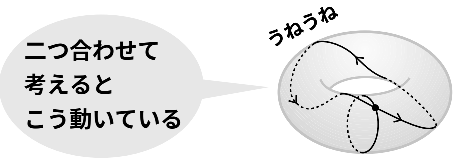



図 2-(b)　連成振動全体の解の挙動

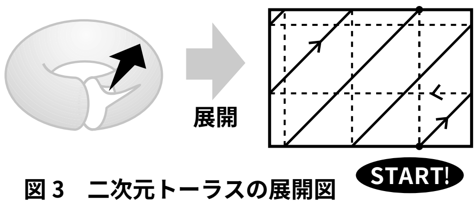



図 3　二次元トーラスの展開図

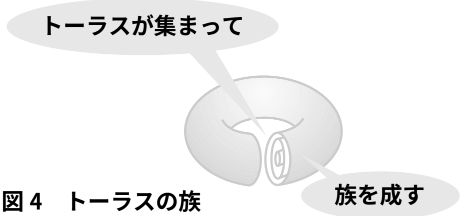



図 4　トーラスの族

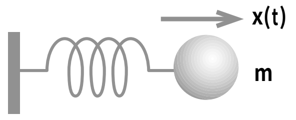



図 1-(a)　単振動

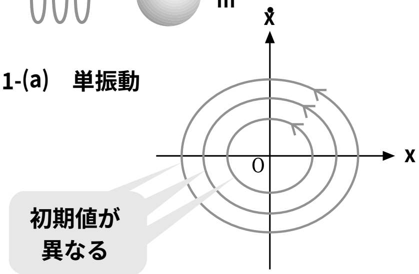



図 1-(b)　単振動の解の挙動

それではもう少し複雑にして、二つのおもりa, bをつけたバネの連成振動(図２-(a))について考えてみると、これを記述する運動方程式は、

$$\begin{cases} m\ddot{x}_a = -k_1 x_a + k_2(x_b - x_a) \\ m\ddot{x}_b = -k_2(x_b - x_a) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots（式２）$$

と書ける。このとき相空間は$(x_a, x_b, \dot{x}_a, \dot{x}_b)$空間、即ち四次元であることに注意しながら、解は相空間で見るとどんな曲線を描くか考えてみよう。

これは単振動を二つ合わせたものであるから、連成振動全体としての解はそれぞれの解を重ね合わせたものとなる。図２-(b)を見てほしい。ドーナツの表面上をうねうねと動いているものがこの連成振動の解である。（なぜドーナツ型になるかは図５で示しておくので見てほしい。）このドーナツを「トーラス」という。特に、おもりが二つの連成振動の場合は「二次元トーラス」と呼ばれる。二次元？　と思っただろうか。ドーナツは三次元に見えるではないか、と。そうではない。あくまでも解はトーラス表面上という二次元の世界に制約されているのだ。

この連成振動のトーラスは、単振動と同じように初期値が異なれば別のものになってくる。この集合を指して「トーラスの族」という。図４のようにドーナツの皮が幾重にも重なっているのをイメージするとよい。ただ注意すべきは、トーラスが隙間なくべったりと重なり合ってまるで本当のドーナツのようになっていることである。

ここで、連成振動の固有振動数の比が有理数の場合、図２-(b)のように解は閉じて周期解になる。この周期解を乗せたトーラスでは、どこから出た解も必ず全て出発点に戻ってくるのだ。

固有振動数の比が無理数の場合は、解は閉じないでトーラスを稠密に埋める「準周期解」となる。例えば、この連成振動のおもりa, bが周期１と $\sqrt{2}$ の無理比で運動する場合、同時に二つともが最初と同じ状態に戻ることは絶対にあり得ないから、解は同じ点を二度通ることなくトーラスを稠密に埋める曲線を描く。ただし「周期解」と名前についていることからも分かるように、初めの状態の十分近くまでは戻ってくる。しかし厳密には、この系全体としての解は周期性を持たないから解曲線は閉じないのである。

以上の二つの運動方程式では、解は具体的に関数として求まる（これを求積出来る、という）。解の挙動も分かりやすい。このように、求積可能な系のことを「可積分系」と言う。今のは単純な線形微分方程式であったが、振り子の運動や二体問題（二つの惑星が万有引力で互いに力を及ぼし合うときの運動）などの非線形微分方程式にも、実は求積可能なものがある。

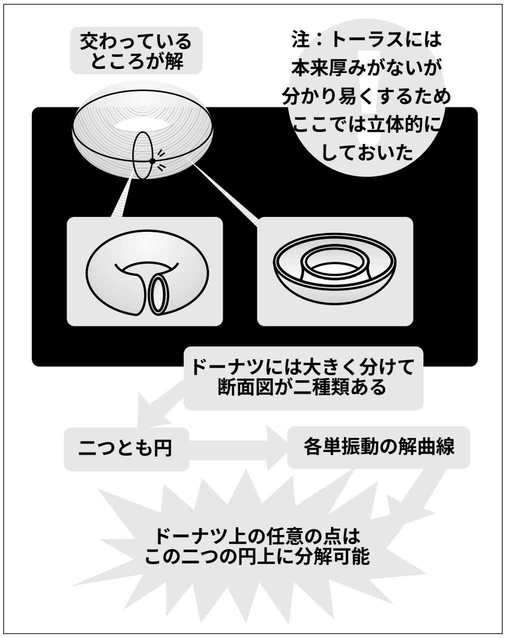



**図5　二つの円が合わさって…？**

# ハミルトン方程式

一般に古典力学の運動は次式で記述される。

$$\dot{x}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\quad (i=1,\cdots,n)\quad \text{（式３）}$$

これが自由度nのハミルトン系である。Hはハミルトニアンと呼ばれる、$x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n$の関数である。例えばどんなHがあるかというと、力がポテンシャル関数Uによって決まる質点系の運動では、$p_i=m_i \cdot \dot{x}_i$（運動量）であり、

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}p_i^2+U(x)\quad \cdots\cdots\cdots \text{（式４）}$$

という、エネルギーについてのお馴染みの関数が挙げられる。

さて、先程の連成振動のときは、単振動の解をのせた二つの曲線、いわば制約条件が交わるところが系全体としての解であるとした(図５)。このように自由度nのハミルトン系の解は、相空間の次元は2nであるが、実際にはn個の制約条件があれば求まることが知られている。先程の連成振動のときは、相空間自体は四次元であったにも関わらず、解の挙動は二次元のトーラスを描いたことを思い出すとよく分かるだろう。この制約条件のことを数学的には第一積分というのだが、制約条件とは、解がある「関数＝定数」という関係を満たしながら動く、という意味なので、運動の保存量と考えることが出来る。例えばハミルトニアンが表しているのは、式４からも分かる通りエネルギーに関する保存量である。

# 解けないときのカミダノミ

二体問題は求積可能であると、すでに述べた。しかし扱う対象が一つ増えて三体問題になった途端に求積できなくなる。こういうときの解の挙動はどうやって調べればいいのだろう。ここで有効になってくるのが「摂動論」と呼ばれる天体力学で発達した手法である。例としてn個の天体からなる系の運動を考えてみよう。図６のように太陽の周りをn-1個の天体がまわっている様子を想像してほしい。各天体の運動を考えるとき、互いに及ぼされる万有引力により運動方程式は式５のよ

うになる。しかしこのままではストレートに求積はできないから、n-1個の二体問題として近似解を求めることにしよう。最も大きい影響を及ぼす太陽のみを残し他のn-1個の天体間の相互作用を無視する。つまり図６内の式５の両辺を$m_i$でわったあと、$m_1$以外の質量を0と置くのだ。すると、項が一つだけの単純で求積可能な式になり、n-1個の天体が描く軌道はそれぞれ太陽を焦点とする楕円になる。そして実際の解はこれらの楕円軌道に近いだろうと考えるのである。もっと精度の高い解が欲しければ、０に等しいとした他の天体の質量を少しずつ現実に近づけていけばよい。この、パラメータを少しずつ動かすことを摂動というのだが、ここで時間を無限大にとばすとき、解が有界にとどまるのか、または衝突が起こらないのかといった問題は全く明らかではなくなる。

今度は平衡状態からの摂動について考えてみよう。平衡状態とはハミルトン系（式３）において右辺=0という点として実現される。これを平衡点と呼ぶ。このとき、一般に平衡点の近傍ではハミルトン系は以下のように表される。原点にあたるのが平衡点である。

$$H(x,p)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i^2+p_i^2)+O(|x|^3+|p|^3) \quad \cdots(式６)$$

第一項は二次、第二項は四次…という風に段々次数が増えていくのだが、ここでは三次以降をまとめて$O(|x|^3+|p|^3)$と書いておいた。しかし平衡点のごく近傍においては、指数の大きい項の影響は無視できるほど小さくなる。影響の微々たるn-1個の天体を無視したときと考え方は同じである。

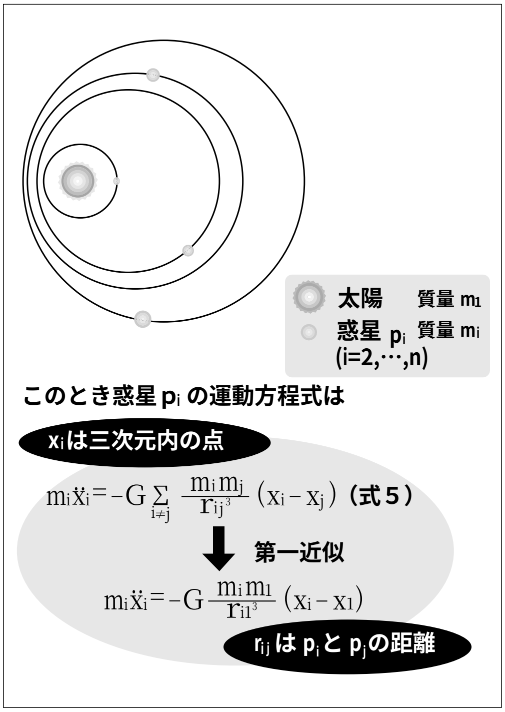



**図６　n個の天体からなる系**

# いよいよ数学、本領発揮

ざっとハミルトン系での摂動について述べてきた。このうち伊藤先生が研究されてきたものとして挙げられるのが「ハミルトニアンの標準化と可積分性の関係」である。

式６を思い出してほしい。ここでは簡単の為とりあえず自由度を２としておこう。この式で$\alpha_1$と$\alpha_2$の比が無理数のとき、式６は$\xi,\eta$の級数で表される変数変換$(x,p)=\phi(\xi,\eta)$により、

$\tau_i=\frac{1}{2}(\xi_i^2+\eta_i^2)$ だけの級数

$$H\circ\phi(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\sum\alpha_i(\xi_i^2+\eta_i^2)+\overbrace{\cdots\cdots}$$
$$=h(\tau_1,\tau_2)\text{とおく} \quad \cdots(式７)$$

と変換できる。そして、もしこの$\phi$が収束するならば、この系は$\tau_1$、$\tau_2$を第一積分に持つ（この導出は図７）。即ち$\tau_k=\frac{1}{2}(\xi_k^2+\eta_k^2)=\mathrm{const.}$である。これは円の方程式、即ち単振動の解の挙動を表している。今は自由度2$(k=1,2)$だから、先程の連成振動と同様な状況が得られることになる。つまり解は$\{\tau_k=\mathrm{const.}\}$で決まる二次元トーラス上の周期解、または準周期解になる！…のだが、問題がひとつある。$\phi$の収束性の判別の難しさである。この$\phi$の級数展開の係数は、おおざっぱに言うと分母に$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$という形を持つ分数で表されるのだが、この分母が０にいくらでも近い値をとれてしまうのだ。これでは係数の絶対値を上からおさえることが難しいので、$\phi$の収束性がい

えない。これを「小分母の困難(small divisor problem)」という。

では、φが収束するのはどういうときなのかという疑問が生じることだろう。実はこれは、式６が可積分系のときに収束するのだ。つまり「φが収束⇔式６が可積分系」という必要十分な関係が成立しているわけである。

φの級数展開の係数の分母に「小分母の困難」が現れるのが問題であった。しかし、系がハミルトニアンＨと独立な第一積分を２個持つならば、小分母の困難について触れなくてもφが収束することを示すことができることを伊藤先生は明らかにしたのである。よってそのφを用いて、式６に無事、意味のある標準化が施されるのだ。

先程自由度nのハミルトン系はn個の第一積分を持てば求積可能だといったが、実は「それらn個の第一積分のグラディエントが一次独立」という前提のもとで成り立つ話である。上の標準化の場合、原点では全ての第一積分のグラディエントは消えてしまうのだが、このような点でも（特異点という）第一積分がn個存在するならば求積可能だ、ということを示したことになる。

ところで、これまでの話では「第一積分がn個存在する」という状況を問題にしていた。しかし一般に摂動を行った場合、ハミルトニアンH以外の第一積分は消えてなくなることが、すでにポアンカレによって指摘されている。このとき摂動系では可積分系のように周期解ばかりを乗せたトーラスは一般には存在しえない。一方、準周期解を

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i=1,\cdots,n)$$ **に**

$$\tau_i = \frac{1}{2}\left(x_i^2 + p_i^2\right)$$ **を代入する！**

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \dfrac{\partial h}{\partial p_i} = \dfrac{\partial h}{\partial \tau_i}\dfrac{\partial \tau_i}{\partial p_i} = \dfrac{\partial h}{\partial \tau_i}\, p_i \\[2ex] \dot{p}_i = -\dfrac{\partial h}{\partial x_i} = -\dfrac{\partial h}{\partial \tau_i}\dfrac{\partial \tau_i}{\partial x_i} = -\dfrac{\partial h}{\partial \tau_i}\, x_i \end{cases}$$

**このとき**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tau_i(t) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(2\,\dot{x}_i(t)\,x_i(t) + 2\,p_i(t)\,\dot{p}_i(t)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(2\,x_i(t)\frac{\partial h}{\partial \tau_i}\,p_i(t) - p_i(t)\frac{\partial h}{\partial \tau_i}\,x_i(t)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

**つまりτは定数だった！！**

**図７　τは定数だった！**

乗せたトーラスは摂動が十分小さい限り存在し続けるが、それも摂動を大きくするにつれ（平衡状態からのズレが大きくなるにつれ）消えていくのである。そして解は制約条件から解放され、広い範囲を動くことになると考えられている。今日よく耳にする「カオス研究」も、そうした状態で解がどういった挙動を見せるのかということが発端になっている。このように「可積分系の摂動論」は今なお発展し続けているといったところで、伊藤先生を含め、多くの研究者が興味を持っている分野なのである。

---

今回初の主筆ということで、数学科を訪れた。数学といえばなんとなく敬遠したくなる人が多いだろうが、今回取材した伊藤先生の研究室のメインは古典力学である。一年生向けの学科案内を見る限り、物体や惑星の万有引力の運動方程式などなど、とっつきやすそうな分野だな…と思っていたがそれは少し甘かった。数学科の大きな特徴は、「一般の研究室と違って証拠物品が無い」ということである。つまり勘違いしたら一直線！なのである。それはそれでスリリングで楽しい作業だったのだが、お陰で何度も先生の研究室に足を運ぶハメになってしまった。一番被害を被ったのは先生と取材メンバーだったのかもしれない。この場をかりてお詫びしたい。しかしそれでも数学が人々（限定？）を魅了してやまないのは、理解することの楽しさである。それもこれも、右も左もわからない取材陣に根気よく教えてくださった、先生のお陰であることは言うまでもない。ありがとうございました。

数学の前に立ちはだかる壁は確かに高いが、乗り越えてしまえば実に不思議で美しい世界があなたを待っている。みんなにも知ってもらえたら、ということでペンを置きたいと思う。

（村上　ユミコ）